Comparaison des techniques de raccordements de développements asymptotiques et de développements multiéchelles

Monique Dauge, Sébastien Tordeux, Grégory Vial

Groupe de travail Ondes & Structures, laboratoire MIP

INSA-Toulouse, laboratorie MIP

IRMAR-Université de Rennes 1

Quelques références

- Développements asymptotiques raccordés:

  Van Dyke (1964) Sanchez Palencia, Leguillon (1987) Il'in (1992).

- Techniques multiéchelles

  Maz'ya, Nazarov, Plamenevskii (1991)
  Oleinik, Shamaev, Yosifian (1992)

- Traitement numérique:

  Schwab, Melenk, Babuska (1995)

Introduction

Les méthodes des développements asymptotiques raccordés et des développements multiéchelles sont des méthodes concurrentes de l'analyse asymtptotique

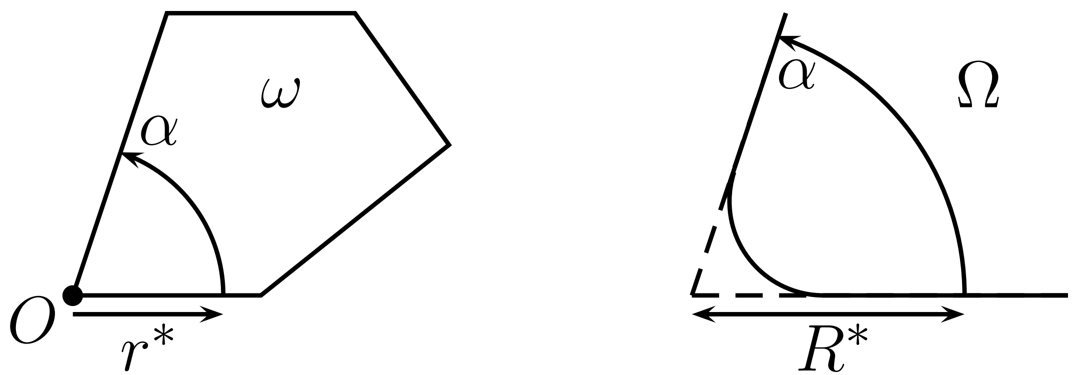
- Deux méthodes concurrentes
- Différence sur le plan "philosophique"
- Similitude sur le plan technique

Plan de l'exposé

- Les développements asymtptotiques raccordés (MAE)
- Les développements multiéchelles
- Comparaison de ces deux méthodes

Présentation du problème

La géométrie



Le problème modèle

$$\text{Trouver } \mathrm{u}_\varepsilon \in \mathrm{H}_0^1(\omega_\varepsilon) \text{ tel que } -\Delta \mathrm{u}_\varepsilon = f \text{ dans } \omega_\varepsilon, \tag{1}$$

où $f \in \mathrm{L}^2(\omega)$ est à support compact dans ω.

Objectif développement asymtptotique de u^ε pour $\varepsilon \to 0$.

Rac. de dév. asympt.

- C'est un "développement multiéchelle" (?!?)
  - L'asymtptotique de la solution est recherchée par l'introduction de plusieurs échelles.
  - Pas de cohabitation des différentes échelles
- Développements limités généralisés suivant plusieurs jeux d'échelles

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} & & \mathsf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) & = & \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\ \mathsf{u}^{i}(\mathbf{x}) \\ \mathsf{u}^{\varepsilon}(\varepsilon\mathbf{X}) & = & \mathsf{U}^{\varepsilon}(\mathbf{X}) & = & \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\mathsf{U}^{i}(\mathbf{X}) \end{array} \right.$$

Ces développements sont alors raccordés.

Les temps de la méthode

- Dérivation des développements asymptotiques:
  - Partie formelle
  - Plusieurs présentations possibles

Les temps de la méthode

- Dérivation des développements asymptotiques:
  - Partie formelle
  - Plusieurs présentations possibles
- Description des développements asymptotiques
  - Partie rigoureuse
  - Définition des termes de développements asymptotiques

Les temps de la méthode

- Dérivation des développements asymptotiques:
  - Partie formelle
  - Plusieurs présentations possibles
- Description des développements asymptotiques
  - Partie rigoureuse
  - Définition des termes de développements asymptotiques
- Validation mathématique du développement asymptotique
  - Partie rigoureuse
  - Estimations d'erreur

Phase 1. Dériv. des dév. asympt.

Dérivation des

- équations volumiques de champ lointain en variables physiques (non dilatées) $\mathbf{x} = (x, y)$
- équations volumiques de champ proche ou de coin en variables dilatées $\mathbf{X} = (\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})$.
- raccords (matching conditions) entre champ proche et champ lointain

Le champ lointain

- Objectif: décrire l'asymptotique dans le jeu de coordonnées physiques

Le champ lointain

- Objectif: décrire l'asymptotique dans le jeu de coordonnées physiques
- Pas de changement d'échelle

Le champ lointain

- Objectif: décrire l'asymptotique dans le jeu de coordonnées physiques
- Pas de changement d'échelle
- On cherche le développement limité généralisé de la solution exacte

$$u^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f^{i}(\varepsilon)\, u^{i}(\mathbf{x}) + \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

Le champ lointain

- Objectif: décrire l'asymptotique dans le jeu de coordonnées physiques
- Pas de changement d'échelle
- On cherche le développement limité généralisé de la solution exacte

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{u}^{i}(\mathbf{x}) \;+\; \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

  - avec $\mathsf{f}^0 \equiv 1$, ($\mathsf{f}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ pour $i > 0$) et ($\mathsf{f}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ pour $i < 0$)

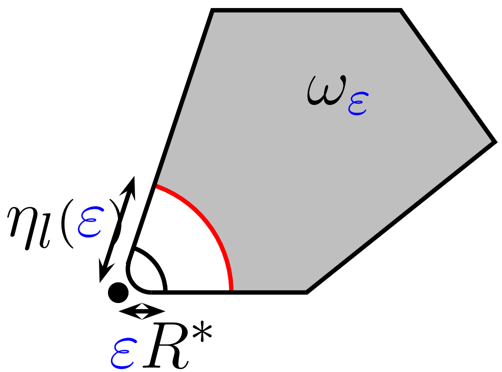
Le champ lointain

- Objectif: décrire l'asymptotique dans le jeu de coordonnées physiques
- Pas de changement d'échelle
- On cherche le développement limité généralisé de la solution exacte

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \; = \; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\; \mathsf{u}^{i}(\mathbf{x}) \; + \; \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

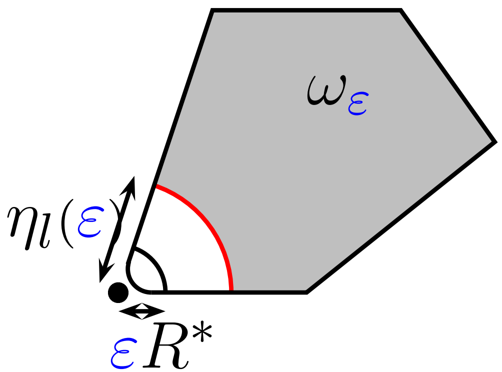
  - avec $\mathsf{f}^0 \equiv 1$, ($\mathsf{f}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ pour $i > 0$) et ($\mathsf{f}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ pour $i < 0$)
  - Les coefficients de ce développement sont des fonctions qui ne dépendent pas de ε.

La zone de validité du champ lointain



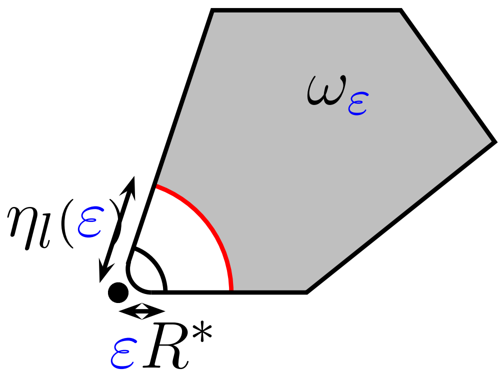
- Un développement en la variable $\mathbf{x}$ ne peut pas saisir la nature de la solution exacte au voisinage du coin

La zone de validité du champ lointain



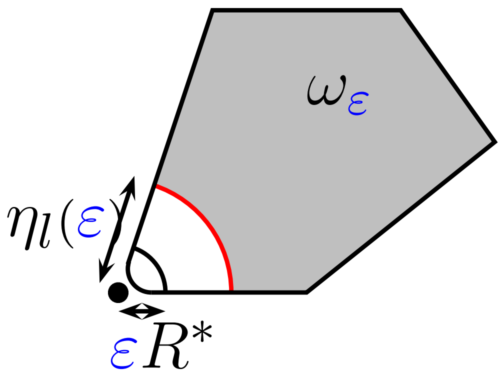
- Un développement en la variable $\mathbf{x}$ ne peut pas saisir la nature de la solution exacte au voisinage du coin
- Toutefois, tant que $\varepsilon = o(|\mathbf{x}|)$, le développement en champ lointain reste une bonne approximation.

La zone de validité du champ lointain



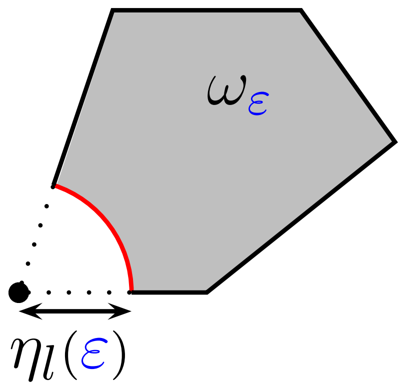
- c.-à-d. $\lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\eta_l(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- Toutefois, tant que $\varepsilon = o(|\mathbf{x}|)$, le développement en champ lointain reste une bonne approximation.

La zone de validité du champ lointain



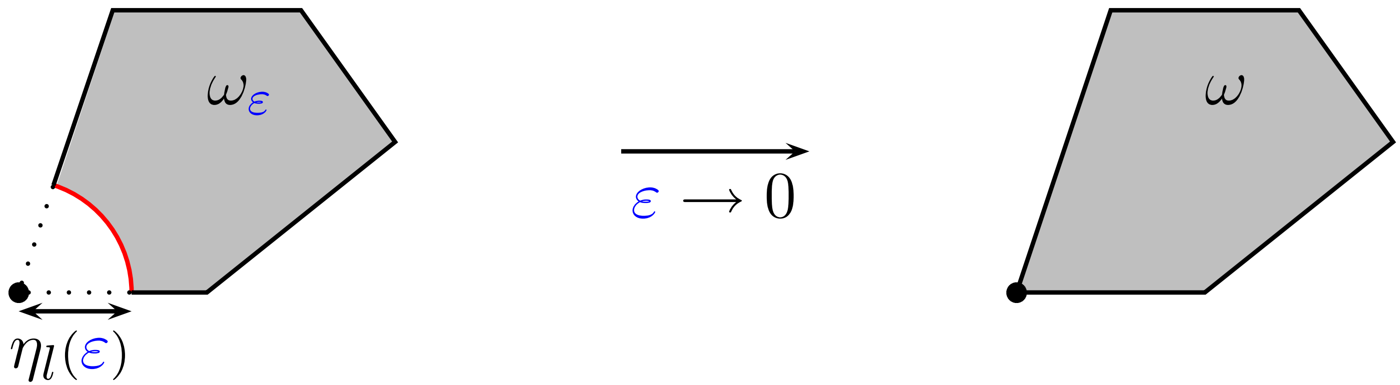
- c.-à-d. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\eta_l(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- c.-à-d. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \eta_l(\varepsilon) = 0.$

La zone de validité du champ lointain



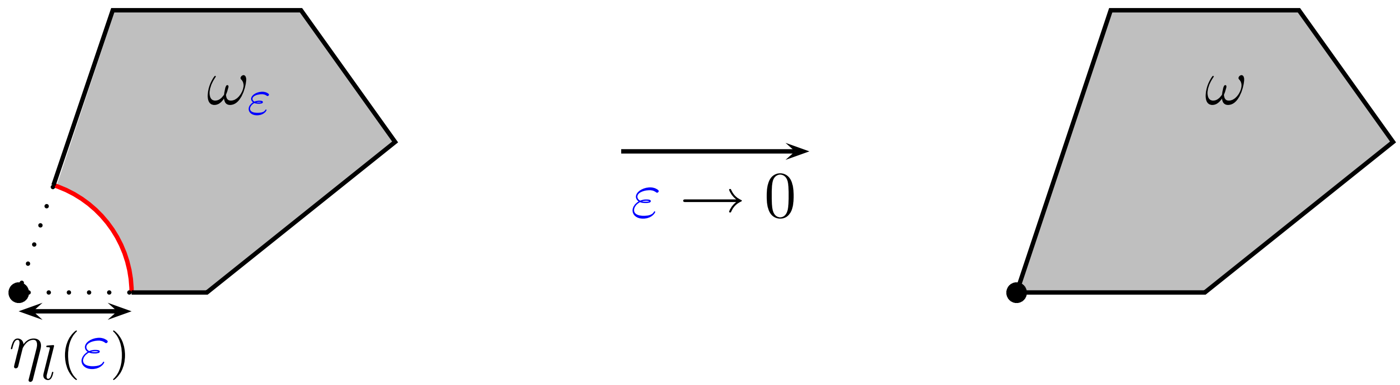
- c.-à-d. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\eta_l(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- c.-à-d. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \eta_l(\varepsilon) = 0.$

La zone de validité du champ lointain



- c.-à-d. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\eta_l(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- c.-à-d. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \eta_l(\varepsilon) = 0.$

La zone de validité du champ lointain



Les termes u^i du développement asymtptotique

$$\mathsf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon)\, \mathsf{u}^i(\mathbf{x}) \;+\; \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^\infty)$$

sont définis sur ω.

Les équations de champ lointain

u^{ε} vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^{\varepsilon} = f \quad \text{dans } \omega_{\varepsilon}.$$

Les équations de champ lointain

u^ε vérifie

$$-\Delta u^\varepsilon \; = \; f \qquad \text{dans } \omega_\varepsilon.$$

Soit $\mathbf{x} \in \omega$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \omega_\varepsilon$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$-\Delta u^\varepsilon(\mathbf{x}) \; = \; f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Les équations de champ lointain

u^ε vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^\varepsilon \;=\; f \qquad \text{dans } \omega_\varepsilon.$$

Soit $\mathbf{x} \in \omega$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \omega_\varepsilon$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$-\Delta\Big[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon)\mathsf{u}^i(\mathbf{x})\Big] \;=\; f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Les équations de champ lointain

u^{ε} vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^{\varepsilon} \;=\; f \qquad \text{dans } \omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \omega$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\big[-\Delta \mathsf{u}^{i}(\mathbf{x})\big] \;=\; f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Les équations de champ lointain

u^{ε} vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^{\varepsilon} = f \quad \text{dans } \omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \omega$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\big[-\Delta \mathsf{u}^{i}(\mathbf{x})\big] = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

En identifiant terme à terme, il vient

$$-\Delta \mathsf{u}^{0} = f \quad \text{et} \quad (-\Delta \mathsf{u}^{i} = 0 \quad \text{pour } i \neq 0) \quad \text{dans } \omega.$$

Les équations de champ lointain

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Les équations de champ lointain

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \partial\omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Les équations de champ lointain

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \partial\omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{u}^{i}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Les équations de champ lointain

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} \; = \; 0 \qquad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \partial\omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{u}^{i}(\mathbf{x}) \; = \; 0, \qquad \mathbf{x} \in \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

En identifiant terme à terme, il vient

$$\mathsf{u}^{i} = 0 \qquad \text{sur } \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Le champ proche ou de coin

- Objectif: décrire l'asymptotique au voisinage du coin

Le champ proche ou de coin

- Objectif: décrire l'asymptotique au voisinage du coin
- Changement d'échelle $\mathbf{X} = \dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ c.-à-d. $\mathbf{x} = \varepsilon\mathbf{X}$

Le champ proche ou de coin

- Objectif: décrire l'asymptotique au voisinage du coin
- Changement d'échelle $\mathbf{X} = \dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ c.-à-d. $\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{X}$
- On cherche le développement limité généralisé de la solution exacte dilatée

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\varepsilon \mathbf{X}) = \mathsf{U}^{\varepsilon}(\mathbf{X}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{U}^{i}(\mathbf{X}) + \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

Le champ proche ou de coin

- Objectif: décrire l'asymptotique au voisinage du coin
- Changement d'échelle $\mathbf{X} = \dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ c.-à-d. $\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{X}$
- On cherche le développement limité généralisé de la solution exacte dilatée

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\varepsilon \mathbf{X}) = \mathsf{U}^{\varepsilon}(\mathbf{X}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{U}^{i}(\mathbf{X}) + \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

  - avec $\mathsf{F}^0 \equiv 1$, ($\mathsf{F}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ pour $i > 0$) et ($\mathsf{F}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ pour $i < 0$)

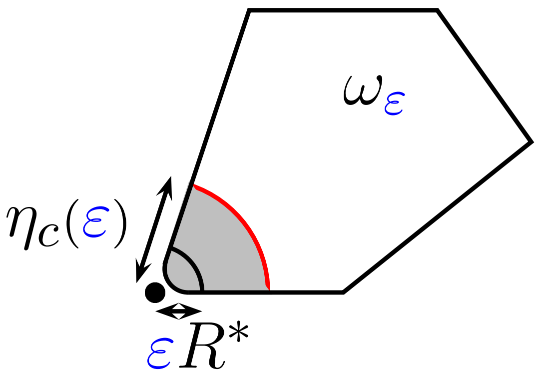
Le champ proche ou de coin

- Objectif: décrire l'asymptotique au voisinage du coin
- Changement d'échelle $\mathbf{X} = \dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ c.-à-d. $\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{X}$
- On cherche le développement limité généralisé de la solution exacte dilatée

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\varepsilon \mathbf{X}) = \mathsf{U}^{\varepsilon}(\mathbf{X}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{U}^{i}(\mathbf{X}) + \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

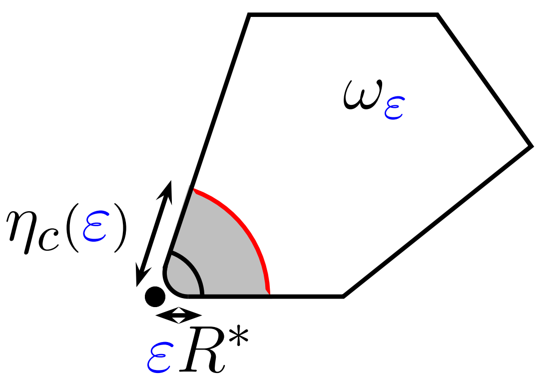
  - avec $\mathsf{F}^0 \equiv 1$, ($\mathsf{F}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ pour $i > 0$) et ($\mathsf{F}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ pour $i < 0$)
  - Les coefficients de ce développement sont des fonctions qui ne dépendent pas de ε.

La zone de validité du champ proche



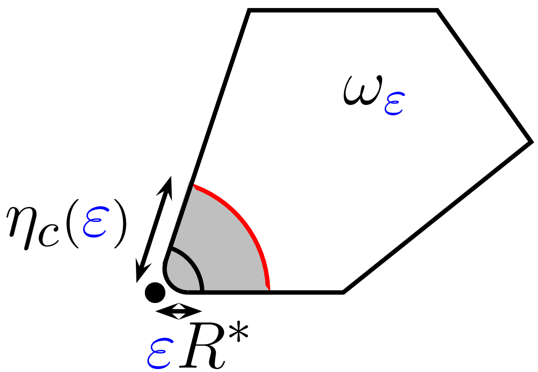
- Un développement en la variable $\mathbf{X}$ ne peut pas saisir la nature de la solution exacte en $\mathbf{x}$ fixe dans ω

La zone de validité du champ proche



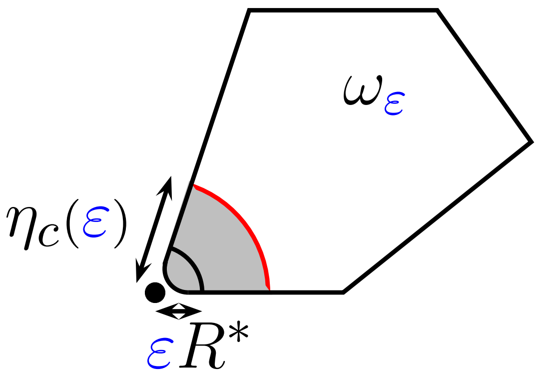
- Un développement en la variable $\mathbf{X}$ ne peut pas saisir la nature de la solution exacte en $\mathbf{x}$ fixe dans ω
- Toutefois, tant que $|\mathbf{x}| = o(1)$, le développement en champ lointain reste une bonne approximation.

La zone de validité du champ proche



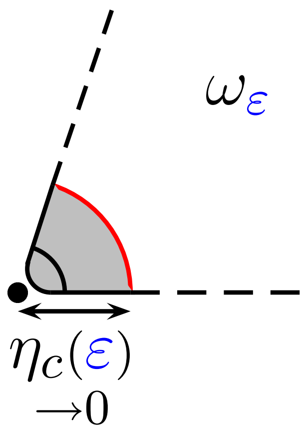
- c.-à-d. $\lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\eta_c(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- Toutefois, tant que $|\mathbf{x}| = o(1)$, le développement en champ proche reste une bonne approximation.

La zone de validité du champ proche



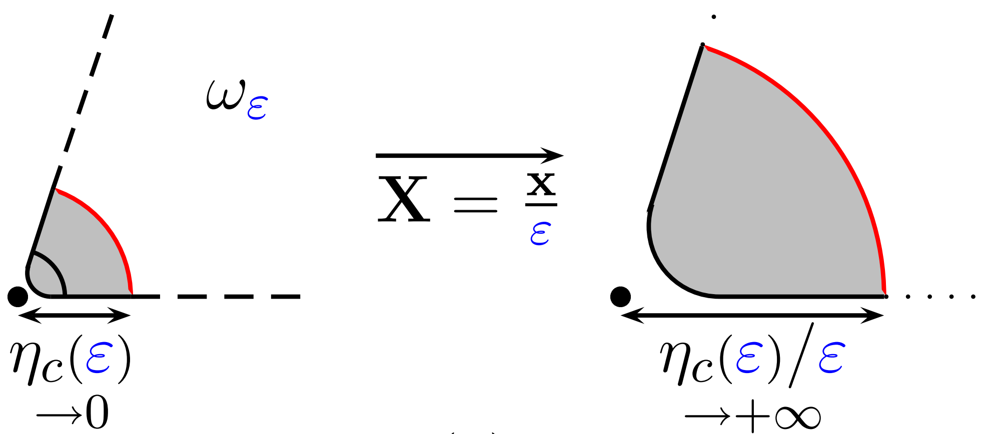
- c.-à-d. $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \dfrac{\eta_c(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- c.-à-d. $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \eta_c(\varepsilon) = 0.$

La zone de validité du champ proche



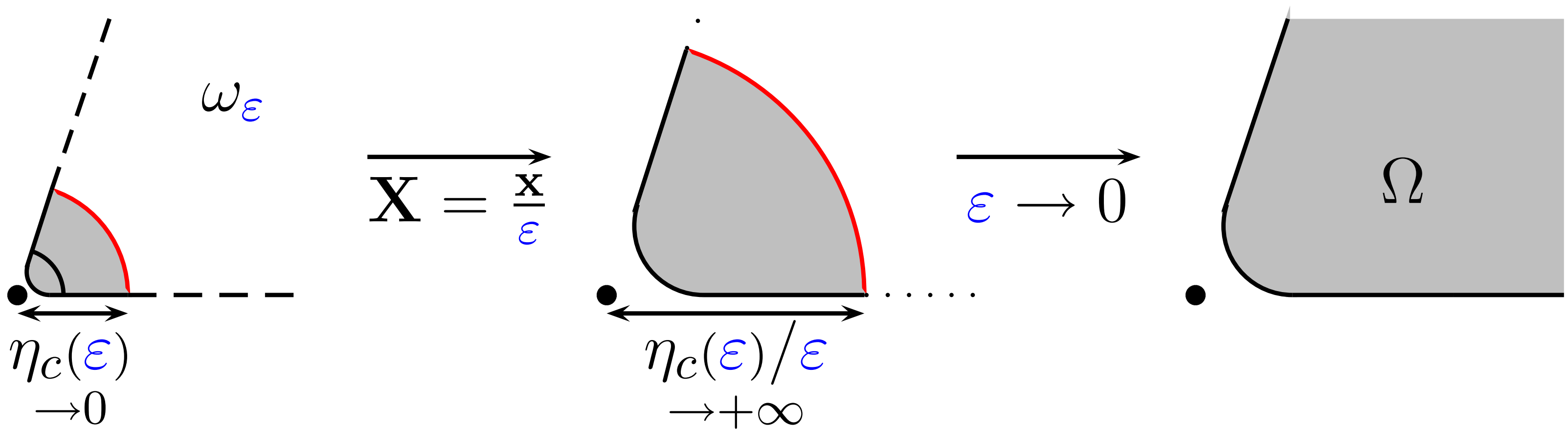
- c.-à-d. $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\eta_c(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- c.-à-d. $\lim_{\varepsilon \to 0} \eta_c(\varepsilon) = 0.$

La zone de validité du champ proche



- c.-à-d. $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\eta_c(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- c.-à-d. $\lim_{\varepsilon \to 0} \eta_c(\varepsilon) = 0.$

La zone de validité du champ proche



Les termes U^i du développement asymtptotique

$$\mathsf{u}^\varepsilon(\varepsilon\mathbf{X}) \;=\; \mathsf{U}^\varepsilon(\mathbf{X}) \;=\; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{U}^i(\mathbf{X}) \;+\; \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^\infty)$$

sont définis sur Ω.

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$-\Delta u^{\varepsilon} = f \quad \text{dans } \omega_{\varepsilon}.$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^{\varepsilon} = f \quad \text{dans } \omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{X} \in \Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$-\Delta \mathsf{u}^{\varepsilon}(\varepsilon\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega. \quad (\varepsilon\mathbf{X} \notin \text{supp}(f))$$

Les équations de champ proche

u^ε vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^\varepsilon \; = \; f \quad \text{dans } \omega_\varepsilon.$$

Soit $\mathbf{X} \in \Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \omega_\varepsilon$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$-\Delta_X \mathsf{U}^\varepsilon(\mathbf{X}) \; = \; 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega. \quad (\varepsilon\mathbf{X} \notin \text{supp}(f))$$

Les équations de champ proche

u^ε vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^\varepsilon \;=\; f \qquad \text{dans } \omega_\varepsilon.$$

Soit $\mathbf{X} \in \Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \omega_\varepsilon$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$-\Delta\Big[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{U}^i(\mathbf{X})\Big] \;=\; 0, \qquad \mathbf{X} \in \Omega.$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^{\varepsilon} = f \quad \text{dans } \omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{X} \in \Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\big[-\Delta \mathsf{U}^{i}(\mathbf{X})\big] = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega.$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^{\varepsilon} \ = \ f \quad \text{ dans } \omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{X} \in \Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon)\big[-\Delta \mathsf{U}^i(\mathbf{X})\big] \ = \ 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega.$$

En identifiant terme à terme, il vient

$$-\Delta \mathsf{U}^i = 0 \quad \text{ dans } \Omega.$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} \;=\; 0 \quad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{X} \in \partial\Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \partial\omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\varepsilon\mathbf{X}) \;=\; 0, \quad \mathbf{X} \in \partial\Omega.$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{X} \in \partial\Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \partial\omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\mathsf{U}^{\varepsilon}(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \partial\Omega.$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{X} \in \partial\Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \partial\omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{U}^{i}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \partial\Omega.$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{X} \in \partial\Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \partial\omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{U}^{i}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \partial\Omega.$$

En identifiant terme à terme, il vient

$$\mathsf{U}^{i} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Les conditions de raccord

- Objectif: fermer les systèmes définissant les termes de développements asymptotiques.
- Méthode: Raccords des développements singuliers (asymptotique en espace)
- Outil: Opération algébrique sur l'ensemble des séries formelles
- En trois temps

  1) Etude des singularités de champ lointain
  2) Etude des singularités de champ proche
  3) Identification des raccords

Développement singulier

- Nous recherchons les champs lointains vérifiant

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{u}^0 = -\mathsf{f} \text{ et } \Delta \mathsf{u}^i \; = \; 0 \text{ dans } \omega, & (i \geqslant 1) \\ \mathsf{u}^i \; = \; 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{O\} & (i \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

Développement singulier

- Nous recherchons les champs lointains vérifiant

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{u}^0 = -\mathsf{f} \text{ et } \Delta \mathsf{u}^i = 0 \text{ dans } \omega, & (i \geqslant 1) \\ \mathsf{u}^i = 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{O\} & (i \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

- Développement singulier (au voisinage du coin)

$$\mathsf{u}^i = \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{a}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta) \right)}_{\text{Terme non variationnel}} + \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{b}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \right)}_{\text{Terme variationnel}}$$

avec

$$\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) = r^{p\lambda} \sin(p\lambda) \quad p \in \mathbb{Z}^*.$$

Développement singulier

- ~**Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(a_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite qui ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

Développement singulier

- **˜Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{a}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.

Développement singulier

- **˜Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{a}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.
  - Si $\mathsf{f} \in \mathrm{L}^2$ est à support compact dans l'ouvert ω

Développement singulier

- **Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(a_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.
  - Si $f \in L^2$ est à support compact dans l'ouvert ω

alors il existe un unique $u \in H^1_*(\omega)$ où

$$H^1_*(\omega) = \Big\{ v \Big| \chi v \in H^1(\omega) \text{ pour tout } \chi \in C^\infty(\overline{\omega}) \text{ avec } \mathbf{0} \notin \text{supp}(\chi) \Big\}. \quad (1)$$

Développement singulier

- **Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{a}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.
  - Si $\mathsf{f} \in \mathsf{L}^2$ est à support compact dans l'ouvert ω

alors il existe un unique $u \in \mathsf{H}^1_*(\omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta \mathsf{u} = \mathsf{f} \text{ dans } \omega, \\ \mathsf{u} = 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{0\}, \\ \mathsf{u} - \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{a}_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda} \right) \in \mathsf{H}^1(\omega). \end{cases}$$

Développement singulier

- **Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(a_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.
  - Si $f \in L^2$ est à support compact dans l'ouvert ω

alors il existe un unique $u \in H^1_*(\omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{0\}, \\ u - \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(a_{p\lambda}\, s^{-p\lambda} \right) \in H^1(\omega). \end{cases}$$

- Il nous manque les $a^i_{p\lambda}$ pour déterminer les u^i.

Notion d'information manquante

Développement singulier (champ proche)

- Nous recherchons les champs proches vérifiant

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{U}^i = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathsf{U}^i = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Développement singulier (champ proche)

- Nous recherchons les champs proches vérifiant

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{U}^i = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathsf{U}^i = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Développement singulier (dans un voisinage de l'infini)

$$\mathsf{U}^i = \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \Big(\mathsf{A}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(\rho,\theta) \Big)}_{\text{Terme non variationnel}} + \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \Big(\mathsf{B}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(\rho,\theta) \Big)}_{\text{Terme variationnel}},$$

avec $s^{p\lambda}(\rho,\theta) \; = \; \rho^{p\lambda} \; \cos \frac{p\pi\theta}{\alpha}, \quad p \in \mathbb{Z}^*$.

Développement singulier (champ proche)

- ~**Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{A}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite qui ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

Développement singulier (champ proche)

- ~**Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{A}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.

Développement singulier (champ proche)

- **Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{A}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.

alors il existe un unique $\mathsf{U} \in \mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega)$ où

$$\mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega) \;=\; \left\{\mathsf{v}\middle|\chi\mathsf{v} \in \mathsf{H}^1(\Omega) \text{ pour tout } \chi \in C^\infty(\overline{\Omega})\right\}. \tag{1}$$

Développement singulier (champ proche)

- ˜**Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{A}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.

  alors il existe un unique $\mathsf{U} \in \mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega)$

Développement singulier (champ proche)

- **Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{A}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.

alors il existe un unique $\mathsf{U} \in \mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta \mathsf{U} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathsf{U} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \mathsf{U} - \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{A}_{p\lambda} \, \mathsf{s}^{p\lambda} \right) \; = \; \underset{R\to+\infty}{O}(1). \end{cases}$$

Développement singulier (champ proche)

- **Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{A}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.

  alors il existe un unique $\mathsf{U} \in \mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta \mathsf{U} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathsf{U} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \mathsf{U} - \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{A}_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda} \right) \; = \; \underset{R\to+\infty}{O}(1). \end{cases}$$

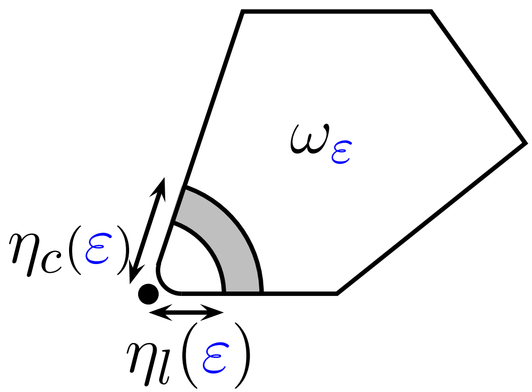
- Il nous manque les $\mathsf{A}^i_{p\lambda}$ pour déterminer les U^i.

  Notion d'information manquante

Les raccords

- On se place dans une zone intermédiaire

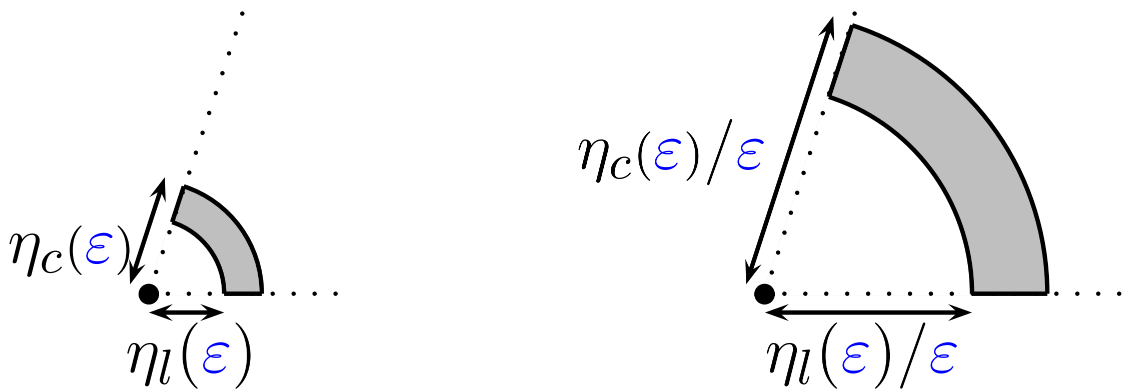
$$\eta_l(\varepsilon) \leqslant r \leqslant \eta_c(\varepsilon) \quad \text{avec } \eta(\varepsilon) \longrightarrow 0 \text{ et } \eta(\varepsilon)/\varepsilon \longrightarrow +\infty.$$



Les raccords

- On se place dans une zone intermédiaire

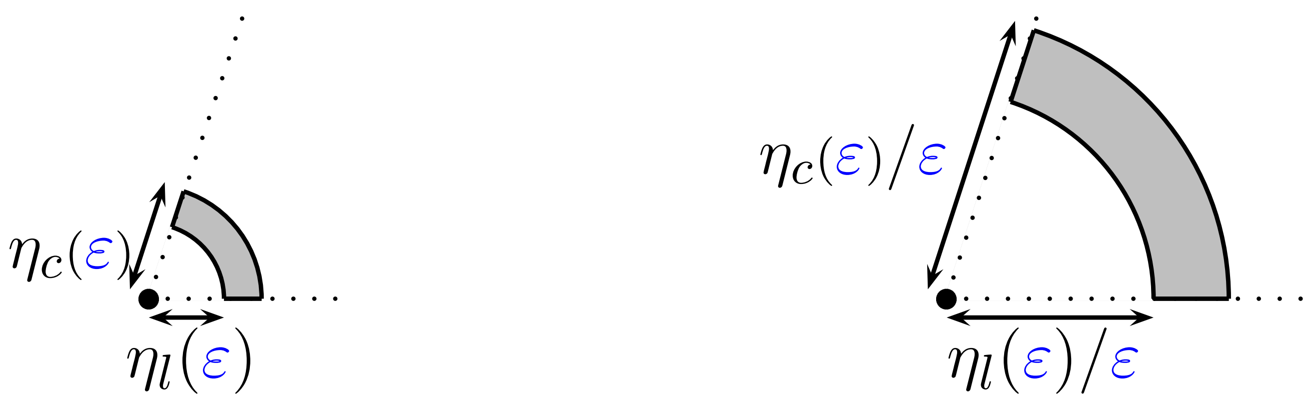
$$\eta_l(\varepsilon) \leqslant r \leqslant \eta_c(\varepsilon) \quad \text{avec } \eta(\varepsilon) \longrightarrow 0 \text{ et } \eta(\varepsilon)/\varepsilon \longrightarrow +\infty.$$



Les raccords

- On se place dans une zone intermédiaire

$$\eta_l(\varepsilon) \leqslant r \leqslant \eta_c(\varepsilon) \quad \text{avec } \eta(\varepsilon) \longrightarrow 0 \text{ et } \eta(\varepsilon)/\varepsilon \longrightarrow +\infty.$$



- En variable lente et rapide, on a

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon)\, \mathsf{u}^i(r,\theta) = \mathsf{u}^\varepsilon(r,\theta) \;=\; \mathsf{U}^\varepsilon(\tfrac{r}{\varepsilon},\theta) \;=\; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon)\, \mathsf{U}^i(\tfrac{r}{\varepsilon},\theta)$$

Les raccords

- En variable lente et rapide, on a

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon)\ \mathsf{u}^i(r,\theta) \ = \ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon)\ \mathsf{U}^i(\tfrac{r}{\varepsilon},\theta)$$

Les raccords

- On injecte les développements singuliers de u^i et U^i

$$\left\{\begin{array}{c}
\displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon) \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{a}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta) \; + \; \mathsf{b}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\right)}_{\mathsf{u}^i(r,\theta)} \\
= \\
\displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon) \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{A}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta) \; + \; \mathsf{B}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\right)}_{\mathsf{U}^i(\frac{r}{\varepsilon},\theta)}
\end{array}\right.$$

Les raccords

- On injecte les développements singuliers de u^i et U^i

$$\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\Big(\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{a}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta)\;+\;\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{b}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\Big)\\ =\\ \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\Big(\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{A}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\;+\;\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{B}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{-p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\Big)\end{array}\right.$$

Or

$$\left\{\begin{array}{lcl} s^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta) & = & \varepsilon^{-p\lambda}\,s^{p\lambda}(r,\theta),\\ s^{-p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta) & = & \varepsilon^{p\lambda}\,s^{-p\lambda}(r,\theta).\end{array}\right.$$

Les raccords

- On injecte les développements singuliers de u^i et U^i

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left(\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{a}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta)\;+\;\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{b}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\right)\\
=\\
\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left(\varepsilon^{-p\lambda}\,\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{A}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\;+\;\varepsilon^{p\lambda}\,\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{B}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta)\right)
\end{array}
\right.
$$

Les raccords

- On injecte les développements singuliers de u^i et U^i

$$\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\Big(\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{a}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta)\;+\;\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{b}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\Big)\\ = \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\Big(\varepsilon^{-p\lambda}\,\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{A}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\;+\;\varepsilon^{p\lambda}\,\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{B}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta)\Big)\end{array}\right.$$

On identifie les termes en $\mathsf{s}^{-p\lambda}$ et $\mathsf{s}^{p\lambda}$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{a}^i_{p\lambda}\;=\;\varepsilon^{p\lambda}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{B}^i_{p\lambda},$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{b}^i_{p\lambda}\;=\;\varepsilon^{-p\lambda}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{A}^i_{p\lambda}.$$

Choix des fonctions de jauge

- Comment choisir les $\mathsf{f}^i(\varepsilon)$ et $\mathsf{F}^i(\varepsilon)$?

Choix des fonctions de jauge

- Comment choisir les $\mathsf{f}^i(\varepsilon)$ et $\mathsf{F}^i(\varepsilon)$?
- Il nous faut imposer les relations

$$\left\{\begin{array}{lcl} \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon)\ \mathsf{a}^i_{p\lambda} & = & \displaystyle\varepsilon^{p\lambda} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon)\ \mathsf{B}^i_{p\lambda}, \\ \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon)\ \mathsf{b}^i_{p\lambda} & = & \displaystyle\varepsilon^{-p\lambda} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon)\ \mathsf{A}^i_{p\lambda}. \end{array}\right.$$

Il semble suffisant de considérer

$$\mathsf{f}^{\,i}(\varepsilon) = \varepsilon^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{F}^i(\varepsilon) = \varepsilon^{i\lambda}.$$

Choix des fonctions de jauge

- C'est-à-dire les Ansatz

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{U}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}.$$

et les relations de couplage

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{(i+p)\lambda}\, \mathsf{B}_{p\lambda}^{i\lambda},$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{b}_{p\lambda}^{i\lambda} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{(i-p)\lambda}\, \mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda}.$$

Choix des fonctions de jauge

- C'est-à-dire les Ansatz

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{U}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}.$$

et les relations de couplage

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{B}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda},$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{b}_{p\lambda}^{i\lambda} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{A}_{p\lambda}^{(i+p)\lambda}.$$

Choix des fonctions de jauge

- C'est-à-dire les Ansatz

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{U}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}.$$

- En identifiant il vient les relations de couplage

$$\mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} = \mathsf{B}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{b}_{p\lambda}^{i\lambda} = \mathsf{A}_{p\lambda}^{(i+p)\lambda}.$$

Choix des fonctions de jauge

- C'est-à-dire les Ansatz

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{U}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}.$$

- et par conséquent

$$\mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} = \mathsf{B}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda} = \mathsf{b}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda}.$$

Un résultat de stabilité

- Sous forme variationnelle le problème

$$\text{Chercher } u^\varepsilon \in H_0^1(\omega_\varepsilon) \text{ tel que } \Delta u^\varepsilon = -f.$$

s'écrit

$$\begin{cases} \text{Chercher } u^\varepsilon \in H_0^1(\omega_\varepsilon) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_{\omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v = \int_{\omega_\varepsilon} f\, v \quad \forall v \in H_0^1(\omega_\varepsilon). \end{cases}$$

Un résultat de stabilité

- Sous forme variationnelle le problème

$$\text{Chercher } \mathsf{u}^{\varepsilon} \in \mathsf{H}^1_0(\omega_{\varepsilon}) \text{ tel que } \Delta \mathsf{u}^{\varepsilon} = -\mathsf{f}.$$

s'écrit

$$\begin{cases} \text{Chercher } \mathsf{u}^{\varepsilon} \in \mathsf{H}^1_0(\omega_{\varepsilon}) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_{\omega_{\varepsilon}} \nabla \mathsf{u}^{\varepsilon} \cdot \nabla \mathsf{v} = \int_{\omega_{\varepsilon}} \mathsf{f}\,\mathsf{v} \quad \forall \mathsf{v} \in \mathsf{H}^1_0(\omega_{\varepsilon}). \end{cases}$$

- Pour $\mathsf{v} = \mathsf{u}^{\varepsilon}$, on montre la stabilité de u^{ε}

$$\|\mathsf{u}^{\varepsilon}\|_{\mathsf{H}^1(\omega_{\varepsilon})} \leqslant C\,\|\mathsf{f}\|_{\mathsf{L}^2(\omega^{\varepsilon})}.$$

Un résultat de stabilité

- Ainsi,

$$\mathrm{u}^{\varepsilon} \;=\; \underset{\varepsilon\to 0}{O}(1) \qquad \text{dans } \mathrm{H}^1(\omega_{\varepsilon})$$

Un résultat de stabilité

- Ainsi,

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = \underset{\varepsilon \to 0}{O}(1) \qquad \text{dans } \mathrm{H}^1(\omega_{\varepsilon})$$

- Conséquence sur les Ansatz

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{U}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}.$$

Un résultat de stabilité

- Ainsi,

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = \underset{\varepsilon \to 0}{O}(1) \qquad \text{dans } \mathsf{H}^1(\omega_{\varepsilon})$$

- Conséquence sur les Ansatz

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{U}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}.$$

- Pas de termes d'indice négatif (condition nécessaire à la stabilité)

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{U}^{\varepsilon} = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}.$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ lointain

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{u}^0 = -\mathsf{f} \text{ et } \Delta \mathsf{u}^{i\lambda} \ = \ 0 \text{ dans } \omega, & (i \geqslant 1) \\ \mathsf{u}^{i\lambda} \ = \ 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{O\} & (i \in \mathbf{N}), \\ \mathsf{u}^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \Big(\mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} \, \mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta) \Big) \ + \ \sum_{p=1}^{+\infty} \Big(\mathsf{b}_{p\lambda}^{i\lambda} \, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \Big) & \end{cases}$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ lointain

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{u}^0 = -\mathsf{f} \text{ et } \Delta \mathsf{u}^{i\lambda} \;=\; 0 \text{ dans } \omega, & (i \geqslant 1) \\ \mathsf{u}^{i\lambda} \;=\; 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{O\} & (i \in \mathbb{N}), \\ \mathsf{u}^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta) \right) \;+\; \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{b}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \right) & \end{cases}$$

- Relation de couplage

$$\mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} \;=\; \mathsf{B}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda},$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ lointain

$$\begin{cases} \Delta u^0 = -f \text{ et } \Delta u^{i\lambda} = 0 \text{ dans } \omega, & (i \geqslant 1) \\ u^{i\lambda} = 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{O\} & (i \in \mathbf{N}), \\ u^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(a_{p\lambda}^{i\lambda}\, s^{-p\lambda}(r,\theta) \right) + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(b_{p\lambda}^{i\lambda}\, s^{p\lambda}(r,\theta) \right) & \end{cases}$$

- Relation de couplage ($U^{(i-p)\lambda} \equiv 0$ pour $p > i$)

$$\begin{cases} a_{p\lambda}^{i\lambda} = B_{p\lambda}^{(i-p)\lambda}, & 1 \leqslant p \leqslant i, \\ a_{p\lambda}^{i\lambda} = 0, & p > i. \end{cases}$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ lointain

$$\begin{cases} \Delta u^0 = -f \text{ et } \Delta u^{i\lambda} = 0 \text{ dans } \omega, & (i \geqslant 1) \\ u^{i\lambda} = 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{O\} & (i \in \mathbb{N}), \\ u^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(a_{p\lambda}^{i\lambda}\, s^{-p\lambda}(r,\theta) \right) + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(b_{p\lambda}^{i\lambda}\, s^{p\lambda}(r,\theta) \right) & \end{cases}$$

- Relation de couplage ($U^{(i-p)\lambda} \equiv 0$ pour $p > i$)

$$\begin{cases} a_{p\lambda}^{i\lambda} = B_{p\lambda}^{(i-p)\lambda}, & 1 \leqslant p \leqslant i, \\ a_{p\lambda}^{i\lambda} = 0, & p > i. \end{cases}$$

- Connaissant les $U^{j\lambda}$, $j < i$, le terme $u^{i\lambda}$ est déterminé.

Définition des termes des développements

- Termes en champ proche $(i \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{U}^{i\lambda} = 0 & \text{dans } \omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(R,\theta) \right) + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{B}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(R,\theta) \right) \end{cases}$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ proche $(i \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{U}^{i\lambda} = 0 & \text{dans } \omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda} \, \mathsf{s}^{p\lambda}(R,\theta) \right) + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{B}_{p\lambda}^{i\lambda} \, \mathsf{s}^{-p\lambda}(R,\theta) \right) \end{cases}$$

- Relation de couplage

$$\mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda} = \mathsf{b}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda},$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ proche $(i \in \mathbb{N})$

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta \mathsf{U}^{i\lambda} & = & 0 & \text{dans } \omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \Big(\mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(R,\theta)\Big) & + & \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \Big(\mathsf{B}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(R,\theta)\Big) & \end{array}\right.$$

- Relation de couplage ($\mathsf{u}^{(i-p)\lambda} \equiv 0$ pour $p > i$)

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda} & = & \mathsf{b}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda}, & 1 \leqslant p \leqslant i, \\ \mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda} & = & 0, & p > i. \end{array}\right.$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ proche $(i \in \mathbb{N})$

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta \mathsf{U}^{i\lambda} & = & 0 & \text{dans } \omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \Big(\mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(R,\theta)\Big) & + & \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \Big(\mathsf{B}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(R,\theta)\Big) & \end{array}\right.$$

- Relation de couplage ($\mathsf{u}^{(i-p)\lambda} \equiv 0$ pour $p > i$)

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda} & = & \mathsf{b}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda}, & 1 \leqslant p \leqslant i, \\ \mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda} & = & 0, & p > i. \end{array}\right.$$

- Connaissant les $\mathsf{u}^{j\lambda}$, $j < i$, le terme $\mathsf{U}^{i\lambda}$ est déterminé.

Un diagramme de définition hierarchique

- Initialisation de l'algorithme

  Chercher $u^0 \in H_0^1(\omega)$ tel que $-\Delta u^0 = f$ et $U^{i\lambda} \equiv 0.$

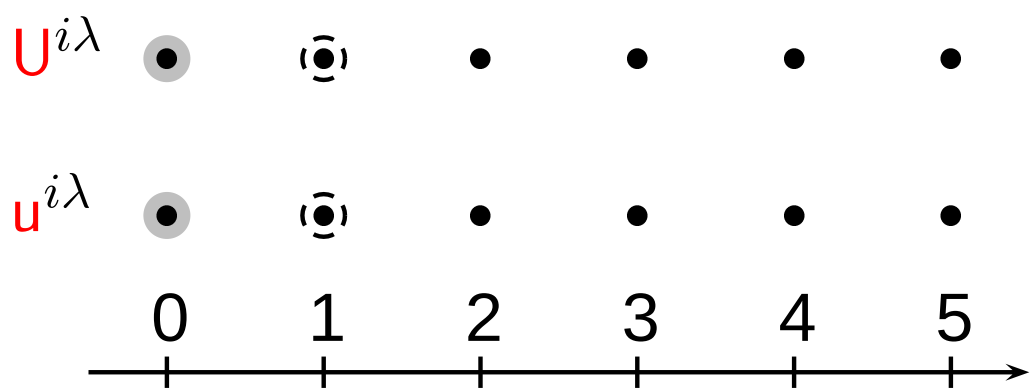
- Construction du terme général

Un diagramme de définition hierarchique

- Initialisation de l'algorithme

Chercher $\mathsf{u}^0 \in \mathsf{H}^1_0(\omega)$ tel que $-\Delta \mathsf{u}^0 = f$ et $\mathsf{U}^{i\lambda} \equiv 0.$

- Construction du terme général

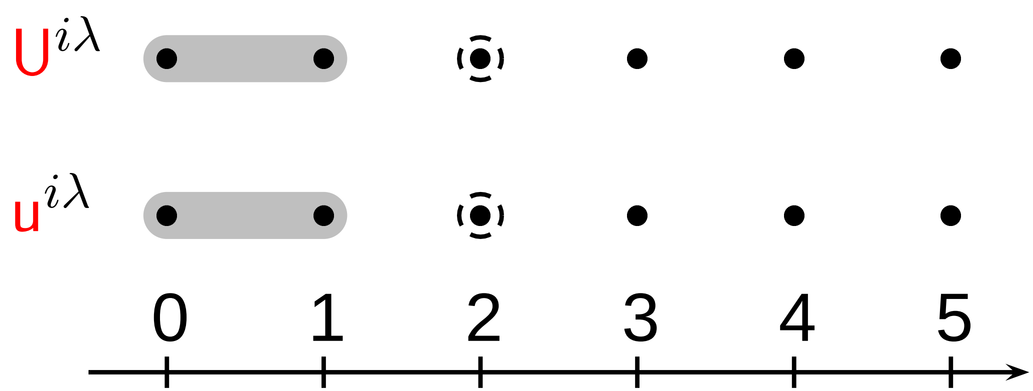


Un diagramme de définition hierarchique

- Initialisation de l'algorithme

Chercher $u^0 \in H^1_0(\omega)$ tel que $-\Delta u^0 = f$ et $U^{i\lambda} \equiv 0.$

- Construction du terme général

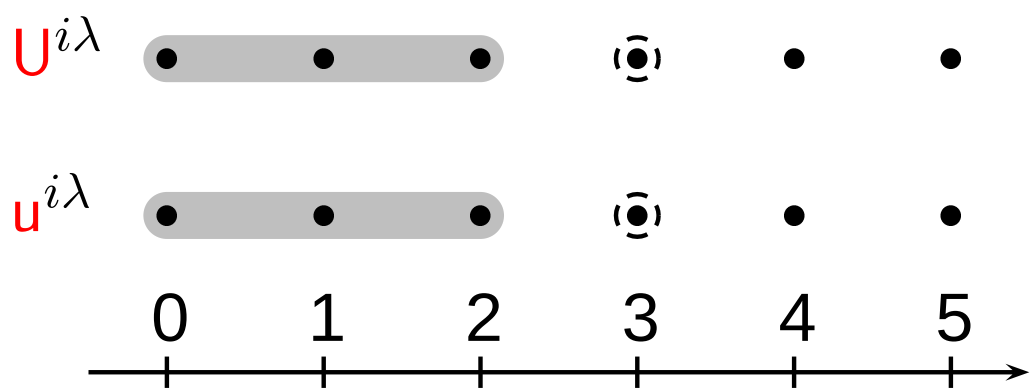


Un diagramme de définition hierarchique

- Initialisation de l'algorithme

Chercher $\mathsf{u}^0 \in \mathsf{H}^1_0(\omega)$ tel que $-\Delta \mathsf{u}^0 = f$ et $\mathsf{U}^{i\lambda} \equiv 0.$

- Construction du terme général

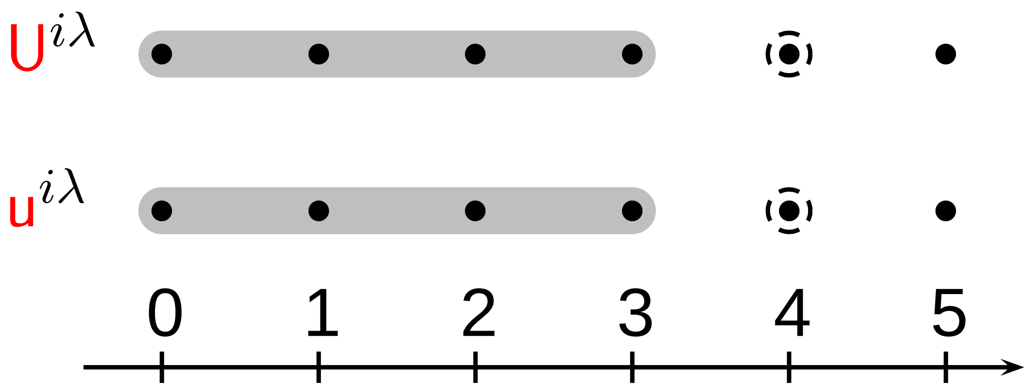


Un diagramme de définition hierarchique

- Initialisation de l'algorithme

Chercher $\mathsf{u}^0 \in \mathsf{H}^1_0(\omega)$ tel que $-\Delta \mathsf{u}^0 = f$ et $\mathsf{U}^{i\lambda} \equiv 0.$

- Construction du terme général

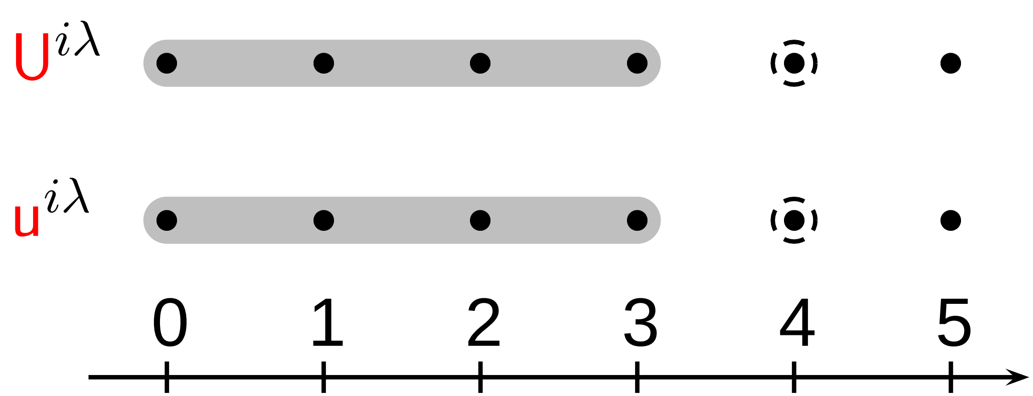


Un diagramme de définition hierarchique

- Initialisation de l'algorithme

Chercher $\mathsf{u}^0 \in \mathsf{H}^1_0(\omega)$ tel que $-\Delta \mathsf{u}^0 = f$ et $\mathsf{U}^{i\lambda} \equiv 0.$

- Construction du terme général



- Les suites de fonctions $(\mathsf{u}^{i\lambda})_i$ et $(\mathsf{U}^{i\lambda})_i$ sont bien définies.

En résumé

- A disposition, des séries formelles

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}(r,\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}(r,\theta)$$

- Quel sens mathématique donner aux égalités formelles

$$\mathsf{u}_{\varepsilon}(r,\theta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}(r,\theta) \quad \text{et} \quad \mathsf{U}_{\varepsilon}(r,\theta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}(r,\theta)?$$

- Sens non évident car on peut montrer que ces séries ne convergent pas vers u^{ε}! Il n'y a pas égalité ???

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ lointain

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ lointain
  - Les termes u_i sont singuliers au voisinage de 0.

    $\Longrightarrow$ Pas d'estimation sur tout ω.

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ lointain
  - Les termes u_i sont singuliers au voisinage de 0.
    $\Longrightarrow$ Pas d'estimation sur tout ω.
  - Par contre, on peut espérer montrer l'estimation

    Pour tout $r_0 > 0$,

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon(r,\theta) - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda}(r,\theta) \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} = \underset{\varepsilon \to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ lointain
  - Les termes u_i sont singuliers au voisinage de 0.

    $\Longrightarrow$ Pas d'estimation sur tout ω.
  - Par contre, on peut espérer montrer l'estimation

    Pour tout $r_0 > 0$,

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon(r,\theta) - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda}(r,\theta) \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \ = \underset{\varepsilon\to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

  - Ceci monterait l'unicité du développement.

    (Développement de Taylor dans $\mathsf{H}^1_*(\omega)$)

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ proche

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ proche
  - Les termes U_i sont croissants au voisinage de l'∞.

    $\Longrightarrow$ Pas d'estimation sur tout Ω.

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ proche
  - Les termes U_i sont croissants au voisinage de l'∞.
    $\Longrightarrow$ Pas d'estimation sur tout Ω.
  - Par contre on peut espérer montrer l'estimation

    Pout tout $R_0 > 0$,

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon(\varepsilon R, \theta) - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}(R, \theta) \right\|_{\mathsf{H}^1(\Omega \cap B_{R_0})} \underset{\varepsilon \to 0}{=} O\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ proche
  - Les termes U_i sont croissants au voisinage de l'∞.

    $\Longrightarrow$ Pas d'estimation sur tout Ω.
  - Par contre on peut espérer montrer l'estimation

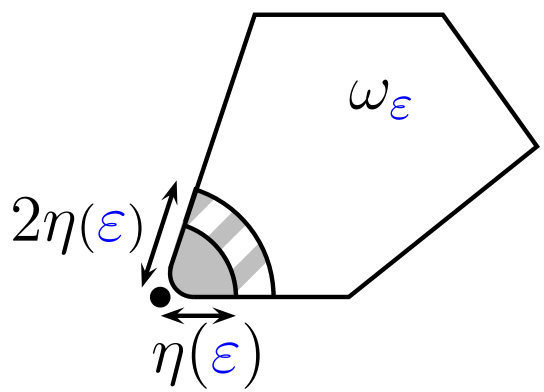
    Pout tout $R_0 > 0$,

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon(\varepsilon R, \theta) - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda} \, \mathsf{U}^{i\lambda}(R, \theta) \right\|_{\mathsf{H}^1(\Omega \cap B_{R_0})} \; = \; \underset{\varepsilon \to 0}{O}(\varepsilon^{(n+1)\lambda}).$$

  - Ceci monterait l'unicité du développement.

    (Développement de Taylor dans $\mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega)$)

Estimation d’erreur globale



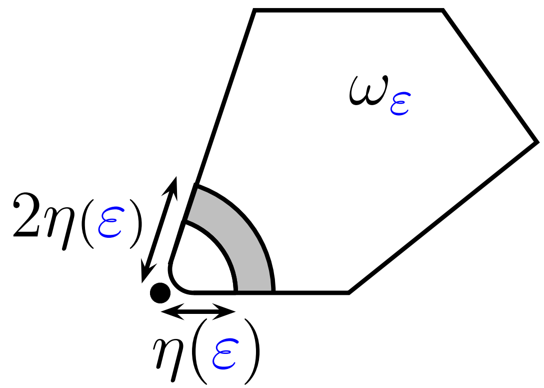
Soit χ et ψ réalisant une partition de l’unité sur $\mathbb{R}^+$

$$\chi(s) + \psi(s) = 1 \quad \text{et} \quad \chi([0,1]) = 1 \text{ et } \chi([2,+\infty[) = 0.$$

On définit l’approximation

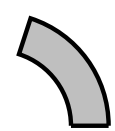
$$\widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon} = \psi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}\right) + \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}\right).$$

Estimation d'erreur globale

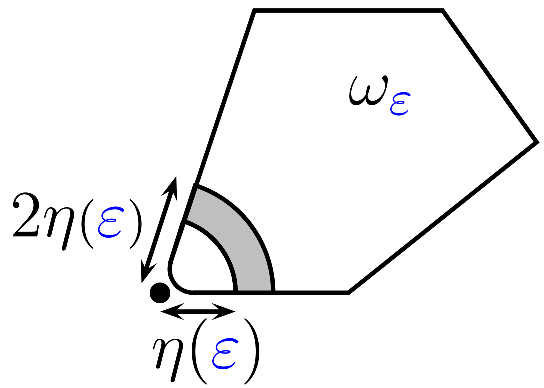


L'erreur $e_n^\varepsilon = u^\varepsilon - \widetilde{u}_n^\varepsilon$ vérifie

$$\begin{cases} e_n^\varepsilon \in H^1(\omega^\varepsilon), \\ e_n^\varepsilon \; = \; 0 \quad \text{sur } \partial\omega^\varepsilon, \\ \operatorname{supp}(\Delta e_n^\varepsilon) \; = \end{cases}$$



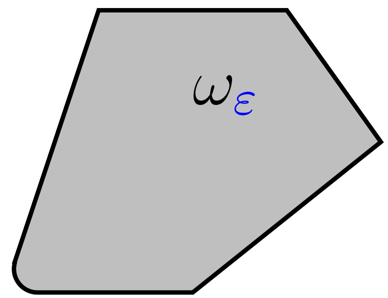
Estimation d'erreur globale



L'erreur $\mathsf{e}_n^\varepsilon = \mathsf{u}^\varepsilon - \widetilde{\mathsf{u}}_n^\varepsilon$ vérifie

$$\begin{cases} \mathsf{e}_n^\varepsilon \in \mathsf{H}_0^1(\omega^\varepsilon), \\ \|\Delta \mathsf{e}_n^\varepsilon\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega^\varepsilon)} \leqslant C \left(\eta(\varepsilon)\right)^{n+1} + \left(\dfrac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)}\right)^{n+1}, \end{cases}$$

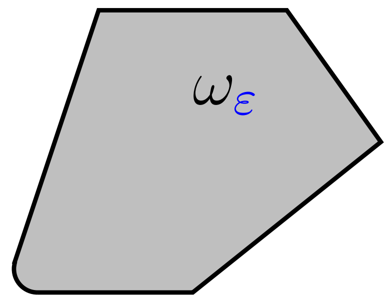
Estimation d'erreur globale



et, par conséquent

$$\|\mathsf{e}_n^{\varepsilon}\|_{\mathsf{H}_0^1(\omega^{\varepsilon})} \leqslant C\,\big(\eta(\varepsilon)\big)^{n+1} + \left(\frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)}\right)^{n+1}.$$

Estimation d'erreur globale



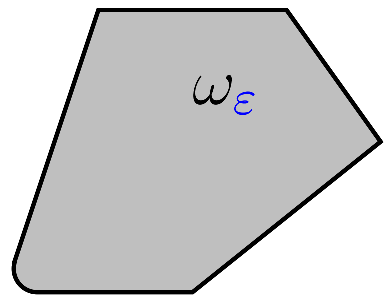
et, par conséquent

$$\|\mathsf{e}_n^\varepsilon\|_{\mathsf{H}_0^1(\omega^\varepsilon)} \leqslant C\,\big(\eta(\varepsilon)\big)^{n+1} + \left(\frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)}\right)^{n+1}.$$

On optimise le choix de $\eta(\varepsilon)$

$$\eta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad \|\mathsf{e}_n^\varepsilon\|_{\mathsf{H}_0^1(\omega^\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}.$$

Estimation d'erreur globale



Théorème. Pour

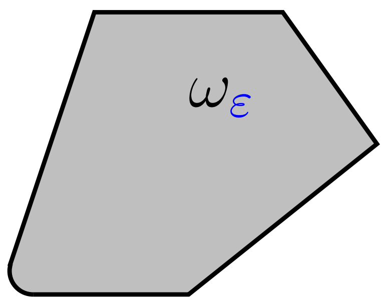
$$\widetilde{\mathsf{u}}_n^\varepsilon \;=\; \psi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i\lambda}\,\mathsf{u}^{i\lambda}\right) \;+\; \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i\lambda}\,\mathsf{U}^{i\lambda}\right),$$

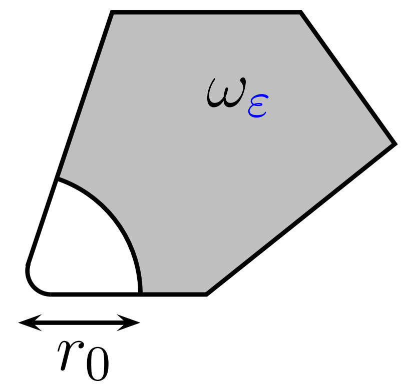
il existe $C > 0$ tel que

$$\left\|\mathsf{u}^\varepsilon - \widetilde{\mathsf{u}}_n^\varepsilon\right\|_{\mathsf{H}_0^1(\omega^\varepsilon)} \;\leqslant\; C\,\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}.$$

Du global au local

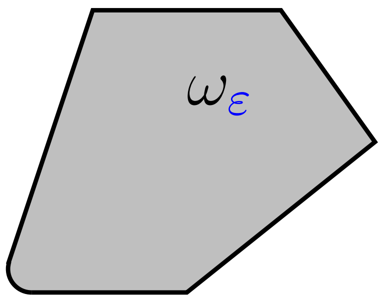
Pour $\|\mathbf{x}\| > r_0 > 0$, $\quad \widetilde{\mathsf{u}}_n^\varepsilon(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}(\mathbf{x})$.

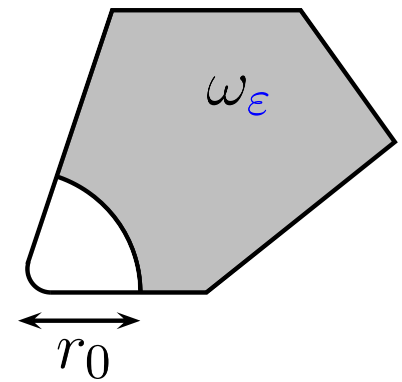




Du global au local

Pour $\|\mathbf{x}\| > r_0 > 0$, $\quad \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}(\mathbf{x})$.

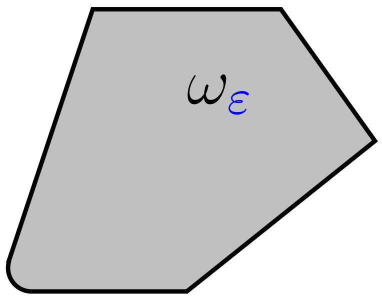


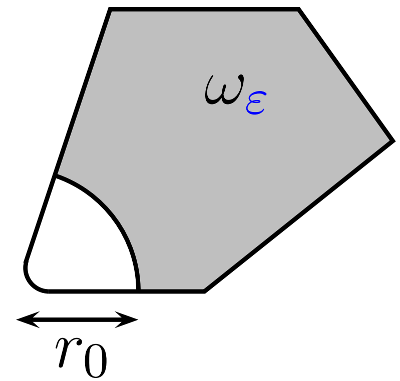


$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}}.$$

Du global au local

Pour $\|\mathbf{x}\| > r_0 > 0$, $\quad \widetilde{\mathsf{u}}^{\varepsilon}_{n}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}(\mathbf{x})$.





$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \widetilde{\mathsf{u}}^{\varepsilon}_{n} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega_\varepsilon \backslash B_{r_0})} \;\leqslant\; C\, \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}}.$$

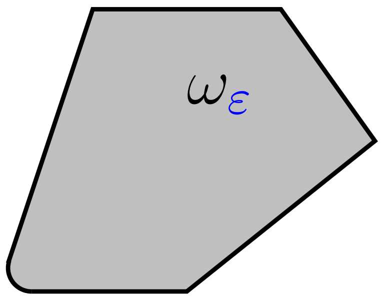
Du global au local

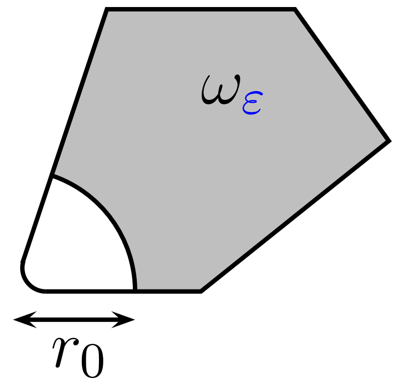
Pour $\|\mathbf{x}\| > r_0 > 0$, $\quad \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\; \mathsf{u}^{i\lambda}(\mathbf{x})$.

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \;\leqslant\; C\; \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}}.$$

Du global au local

Pour $\|\mathbf{x}\| > r_0 > 0$, $\quad \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}(\mathbf{x})$.





$$\Big\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \Big\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}} \quad \text{(non optimal)}.$$

Du global au local

$$\left\| u^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, u^{i\lambda} \right\|_{H^1(\omega\setminus B_{r_0})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}} \quad \text{(non optimal).}$$

On rattrape l'ordre optimal

$$\left\| u^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, u^{i\lambda} \right\|_{H^1(\omega\setminus B_{r_0})} \leqslant \left\| u^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i\lambda}\, u^{i\lambda} \right\|_{H^1(\omega\setminus B_{r_0})} + \left\| \sum_{i=n+1}^{2n} \varepsilon^{i\lambda}\, u^{i\lambda} \right\|_{H^1(\omega\setminus B_{r_0})}.$$

Du global au local

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega\setminus B_{r_0})} \leqslant\ C\ \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}} \quad \text{(non optimal).}$$

On rattrape l'ordre optimal

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega\setminus B_{r_0})} \leqslant\ C\ \varepsilon^{n+1} + \left\| \sum_{i=n+1}^{2n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega\setminus B_{r_0})}.$$

Du global au local

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \leqslant C\ \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}} \quad \text{(non optimal)}.$$

On rattrape l'ordre optimal

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \leqslant C\ \varepsilon^{n+1} + \sum_{i=n+1}^{2n} \varepsilon^{i\lambda} \left\| \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})}.$$

Du global au local

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}} \quad \text{(non optimal).}$$

On rattrape l'ordre optimal

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \leqslant C\, \varepsilon^{n+1} + C\, \varepsilon^{n+1}.$$

Du global au local

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \leqslant\ C\, \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}} \quad \text{(non optimal).}$$

On rattrape l'ordre optimal

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \leqslant\ C\, \varepsilon^{n+1}\ +\ C\, \varepsilon^{n+1}.$$

Ainsi, on a l'estimation optimale

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \leqslant\ C\, \varepsilon^{n+1}.$$

Les développements multiéchelles

- Un développement (double) multiéchelle a la forme

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\, \mathcal{V}^{i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon)$$

- On se restreint ici à

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon) \Big(\underline{\chi}(\mathbf{x}/\varepsilon)\, \mathsf{v}^{i}(\mathbf{x}) + \underline{\psi}(\mathbf{x})\, \mathsf{V}^{i}(\mathbf{x}/\varepsilon) \Big) + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

avec $\underline{\chi}$ et $\underline{\psi}$ des fonctions de troncature,
avec v^{i} et V^{i} des termes variationnels.

Les développements multiéchelles

- Pas de canonicité des développements multiéchelles, pas de recette miracle.
- Pas de calcul formel dans la démarche!

Initialisation de l'algorithme

La limite de u^ε solution de

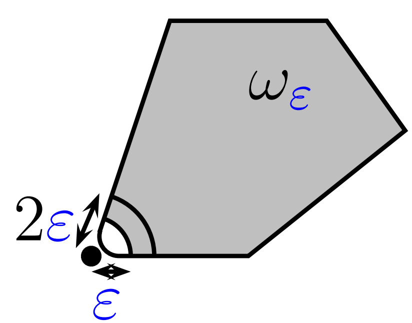
$$\text{Trouver } \mathsf{u}^\varepsilon \in \mathsf{H}^1_0(\omega_\varepsilon) \quad -\Delta \mathsf{u}^\varepsilon = f \quad \text{dans } \omega_\varepsilon.$$

est v^0 donné par la résolution de

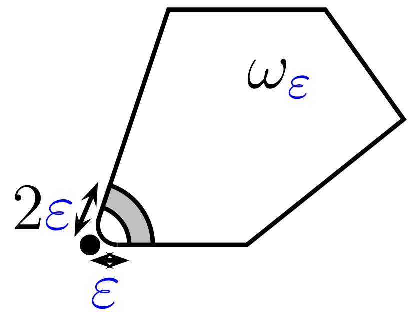
$$\text{Trouver } \mathsf{v}^0 \in \mathsf{H}^1_0(\omega) \quad -\Delta \mathsf{v}^0 = f \quad \text{dans } \omega.$$

Pour définir v^0 sur ω_ε, on utilise une fonction de troncature

$$\widetilde{\mathsf{v}}^\varepsilon_0(\mathbf{x}) \;=\; \chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\, \mathsf{v}^0(\mathbf{x}).$$

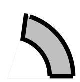


Calcul de l'ordre 1



On calcule le résidu $\mathsf{r}_0^\varepsilon = \Delta\left(\widetilde{\mathsf{v}}_0^\varepsilon - \mathsf{u}^\varepsilon\right)$

$$\mathrm{supp}(\mathsf{r}_0^\varepsilon) =$$ 

et dans  on a

$$\mathsf{r}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) = \Delta\Big[\chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\ \mathsf{v}^0(\mathbf{x})\Big]$$

Calcul de l'ordre 1

Développons v^0 sous la forme

$$\mathsf{v}^0(r,\theta) \;=\; \sum_{p=1}^{+\infty} \alpha^0_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)$$

avec $\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \;=\; \varepsilon^{p\lambda}\; \mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta).$ $\quad$ ($\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \;=\; \varepsilon^{p\lambda}\; \mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta)$)

Calcul de l'ordre 1

Développons v^0 sous la forme

$$\mathsf{v}^0(r,\theta) \;=\; \alpha_\lambda^0\,\mathsf{s}^\lambda(r,\theta) \;+\; \sum_{p=2}^{+\infty}\alpha_{p\lambda}^0\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)$$

avec $\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \;=\; \varepsilon^{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta).$ $\quad$ $(\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \;=\; \varepsilon^{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta))$

Calcul de l'ordre 1

Développons v^0 sous la forme

$$\mathsf{v}^0(r,\theta) \;=\; \varepsilon^\lambda\, \alpha^0_\lambda\, \mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta) \;+\; \sum_{p=2}^{+\infty} \alpha^0_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)$$

avec $\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \;=\; \varepsilon^{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta).$ $\quad$ $(\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \;=\; \varepsilon^{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta))$

Calcul de l'ordre 1

Développons v^0 sous la forme

$$\mathsf{v}^0(r,\theta) \; = \; \varepsilon^\lambda \, \alpha^0_\lambda \, \mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta) \; + \; \sum_{p=2}^{+\infty} \alpha^0_{p\lambda} \, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)$$

Par conséquent, on a

$$\mathsf{r}^\varepsilon_0 \; = \; \varepsilon^\lambda \, \alpha^0_\lambda \, \Delta\Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \, \mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\Big] \; + \; \Delta\Big[\sum_{p=2}^{+\infty} \chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \, \alpha^0_{p\lambda} \, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\Big]$$

Calcul de l'ordre 1

Développons v^0 sous la forme

$$\mathsf{v}^0(r,\theta) \;=\; \varepsilon^\lambda\, \alpha^0_\lambda\, \mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta) \;+\; \sum_{p=2}^{+\infty} \alpha^0_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)$$

Par conséquent, on a

$$\mathsf{r}^\varepsilon_0 \;=\; \underbrace{\varepsilon^\lambda\, \alpha^0_\lambda\, \Delta\Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\, \mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\Big]}_{\|\cdot\|_{H^{-1}(\omega_\varepsilon)}=C\,\varepsilon^\lambda} \;+\; \underbrace{\Delta\Big[\sum_{p=2}^{+\infty}\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\, \alpha^0_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\Big]}_{\|\cdot\|_{H^{-1}(\omega_\varepsilon)}\leqslant C\,\varepsilon^{2\lambda}}$$

Calcul de l'ordre 1

Développons v^0 sous la forme

$$\mathsf{v}^0(r,\theta) \;=\; \varepsilon^\lambda\, \alpha_\lambda^0\, \mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta) \;+\; \sum_{p=2}^{+\infty} \alpha_{p\lambda}^0\, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)$$

Par conséquent, on a

$$\mathsf{r}_0^\varepsilon \;=\; \underbrace{\varepsilon^\lambda\, \alpha_\lambda^0\, \Delta\Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\, \mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\Big]}_{\|\cdot\|_{H^{-1}(\omega_\varepsilon)}=C\,\varepsilon^\lambda} \;+\; \underbrace{\Delta\Big[\sum_{p=2}^{+\infty}\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\, \alpha_{p\lambda}^0\, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\Big]}_{\|\cdot\|_{H^{-1}(\omega_\varepsilon)}\leqslant C\,\varepsilon^{2\lambda}}$$

$\Longrightarrow \varepsilon^\lambda\;\alpha_\lambda^0\;\Delta\Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\;\mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\Big]$ doit entrer dans la construction de l'ordre 1 qui est en fait un ordre λ.

Calcul de l'ordre λ

On rattrape le terme principal du reste

$$\varepsilon^{\lambda}\,\alpha_{\lambda}^{0}\,\Delta\Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\,\mathsf{s}^{\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\Big]$$

par un terme en variable rapide

Calcul de l'ordre λ

On rattrape le terme principal du reste

$$\varepsilon^\lambda \, \alpha^0_\lambda \, \Delta \Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \, \mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon}, \theta) \Big]$$

par un terme en variable rapide

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathsf{V}^\lambda \in \mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega) \text{ tel que} \\ \Delta \mathsf{V}^\lambda = -\alpha^0_\lambda \, \Delta \Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \, \mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon}, \theta) \Big], \\ \mathsf{V}^\lambda = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega, \\ \mathsf{V}^\lambda(R, \theta) \; = \underset{R \to +\infty}{O}(1). \end{cases}$$

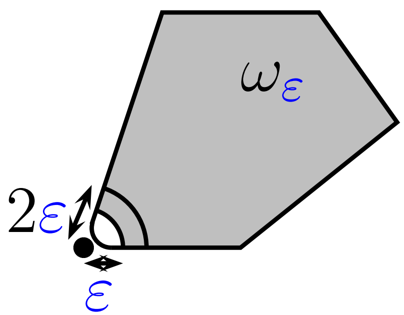
Calcul de l'ordre λ

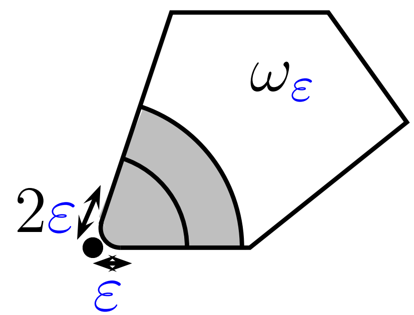
Approximation multiéchelle d'ordre 1

$$\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{\lambda}(\mathbf{x}) \;=\; \chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\,\mathsf{v}^0(\mathbf{x}) \;+\; \mathsf{V}^{\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon).$$

Pour que cette fonction soit bien définie sur ω_ε on utilise une deuxième fonction de troncature ψ

$$\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{\lambda}(\mathbf{x}) \;=\; \chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\,\mathsf{v}^0(\mathbf{x}) \;+\; \psi(\mathbf{x})\,\mathsf{V}^{\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon).$$





Calcul de l'ordre λ

Approximation multiéchelle d'ordre 1

$$\widetilde{\mathsf{v}}_\lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) \;=\; \chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\, \mathsf{v}^0(\mathbf{x}) \;+\; \mathsf{V}^\lambda(\mathbf{x}/\varepsilon).$$

Pour que cette fonction soit bien définie sur ω_ε on utilise une deuxième fonction de troncature ψ

$$\widetilde{\mathsf{v}}_\lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) \;=\; \chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\, \mathsf{v}^0(\mathbf{x}) \;+\; \psi(\mathbf{x})\, \mathsf{V}^\lambda(\mathbf{x}/\varepsilon).$$

On a alors l'estimation

$$\|\widetilde{\mathsf{v}}_\lambda^\varepsilon - \mathsf{u}^\varepsilon\|_{\mathsf{H}^1(\omega_\varepsilon)} \;\leqslant\; C\, \varepsilon^{2\lambda}. \quad (\text{estimation optimale})$$

Construction à un ordre quelconque

Le développement à l'ordre n (plus exactement $n\lambda$) étant construit

$$\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \left[\varepsilon^{i\lambda} \Big(\chi(\mathbf{x}/\varepsilon) \;\; \mathsf{v}^{i\lambda}(\mathbf{x}) \;+\; \psi(\mathbf{x}) \, \mathsf{V}^{i\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon) \Big) \right].$$

Construction à un ordre quelconque

Le développement à l'ordre n (plus exactement $n\lambda$) étant construit

$$\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \left[\varepsilon^{i\lambda}\Big(\chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\;\; \mathsf{v}^{i\lambda}(\mathbf{x}) \;+\; \psi(\mathbf{x})\, \mathsf{V}^{i\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon)\Big)\right].$$

On calcule alors le résidu

$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \Delta\left[\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\right]$$

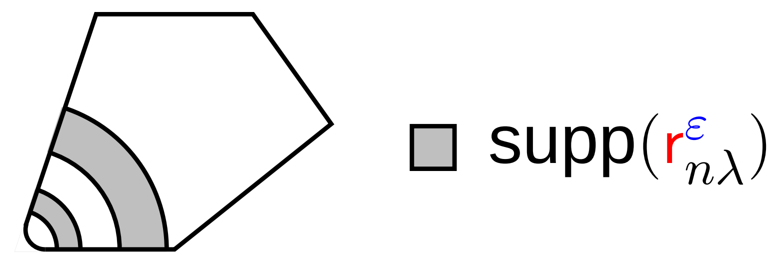
Construction à un ordre quelconque

Le développement à l'ordre n (plus exactement $n\lambda$) étant construit

$$\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \left[\varepsilon^{i\lambda}\Big(\chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\;\; \mathsf{v}^{i\lambda}(\mathbf{x}) \;+\; \psi(\mathbf{x})\, \mathsf{V}^{i\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon)\Big)\right].$$

On calcule alors le résidu

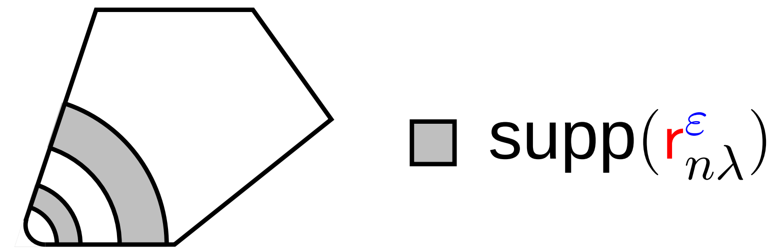
$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \Delta\left[\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\right]$$



Construction à un ordre quelconque

On calcule alors le résidu

$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \Delta\left[\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\right]$$

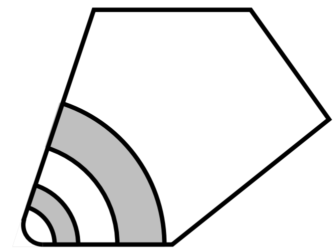


$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \varepsilon^{(n+1)\lambda}\Big(\Delta\Big[\mathsf{w}_{n\lambda}(\mathbf{x})\Big] + \Delta\Big[\mathsf{W}_{n\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon)\Big]\Big) \;+\; \mathsf{R}^{\varepsilon}_{n\lambda}(\mathbf{x}). \qquad (1)$$

Construction à un ordre quelconque

On calcule alors le résidu

$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \Delta\Big[\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\Big]$$



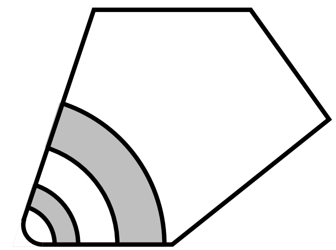
$\square$ supp$(\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda})$

$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \underbrace{\varepsilon^{(n+1)\lambda}\Big(\Delta\Big[\mathsf{w}_{n\lambda}(\mathbf{x})\Big] + \Delta\Big[\mathsf{W}_{n\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon)\Big]\Big)}_{\|\cdot\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{(n+1)\lambda}} + \underbrace{\mathsf{R}^{\varepsilon}_{n\lambda}(\mathbf{x})}_{\|\cdot\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{(n+2)\lambda}} \quad .$$

Construction à un ordre quelconque

On calcule alors le résidu

$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \Delta\Big[\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\Big]$$



$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \underbrace{\varepsilon^{(n+1)\lambda}\Big(\Delta\Big[\mathsf{w}_{n\lambda}(\mathbf{x})\Big] + \Delta\Big[\mathsf{W}_{n\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon)\Big]\Big)}_{\|\cdot\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{(n+1)\lambda}} + \underbrace{\mathsf{R}^{\varepsilon}_{n\lambda}(\mathbf{x})}_{\|\cdot\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{(n+2)\lambda}}\,.$$

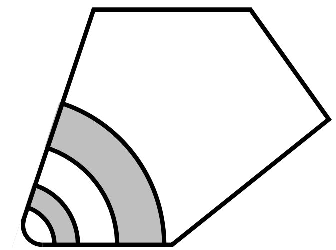
On a l'estimation

$$\|\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\|_{\mathsf{H}^1_0(\omega_\varepsilon)} \;\leqslant\; C\,\varepsilon^{(n+1)\lambda}$$ Estimation optimale!

Construction à un ordre quelconque

On calcule alors le résidu

$$\mathsf{r}_{n\lambda}^{\varepsilon} = \Delta\left[\widetilde{\mathsf{v}}_{n\lambda}^{\varepsilon} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\right]$$



$\square$ $\mathrm{supp}(\mathsf{r}_{n\lambda}^{\varepsilon})$

$$\mathsf{r}_{n\lambda}^{\varepsilon} = \underbrace{\varepsilon^{(n+1)\lambda}\Big(\Delta\Big[\mathsf{w}_{n\lambda}(\mathbf{x})\Big] + \Delta\Big[\mathsf{W}_{n\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon)\Big]\Big)}_{\|\cdot\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{(n+1)\lambda}} + \underbrace{\mathsf{R}_{n\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{x})}_{\|\cdot\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{(n+2)\lambda}} .$$

On a l'estimation

$$\|\widetilde{\mathsf{v}}_{n\lambda}^{\varepsilon} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\|_{\mathsf{H}_0^1(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{(n+1)\lambda}$$ Estimation optimale!

On rattrape les termes principaux d'erreur à l'aide d'un champ en variable lente et d'un champ en variable rapide.

Relation entre les deux développements

Raccordement de développements asymptotiques.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \ = \ \underset{\varepsilon \to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Relation entre les deux développements

Raccordement de développements asymptotiques.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} = \underset{\varepsilon\to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Développement multiéchelle.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega_\varepsilon)} = \underset{\varepsilon\to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Relation entre les deux développements

Raccordement de développements asymptotiques.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega\backslash B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon\to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Développement multiéchelle.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega\backslash B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon\to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Relation entre les deux développements

Raccordement de développements asymptotiques.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \ = \ \underset{\varepsilon \to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Développement multiéchelle.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{v}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \ = \ \underset{\varepsilon \to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Relation entre les deux développements

Raccordement de développements asymptotiques.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega\backslash B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon\to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Développement multiéchelle.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{v}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega\backslash B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon\to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Par inégalité triangulaire

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{v}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega\backslash B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon\to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Relation entre les deux développements

Par inégalité triangulaire

$$\Big\| \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{v}^{i\lambda} \Big\|_{\mathsf{H}^1(\omega\setminus B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon\to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Relation entre les deux développements

Par inégalité triangulaire

$$\Big\| \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{v}^{i\lambda} \Big\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} = \underset{\varepsilon \to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Egalité des termes des développements dans $\omega \setminus B_{r_0}$

$$\mathsf{u}^{i\lambda} = \mathsf{v}^{i\lambda}.$$

Relation entre les deux développements

Par inégalité triangulaire

$$\Big\| \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{v}^{i\lambda} \Big\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon \to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Egalité des termes des développements dans $\omega \setminus B_{r_0}$

$$\mathsf{u}^{i\lambda} \;=\; \mathsf{v}^{i\lambda}.$$

De même, on montre que dans un voisinage du coin

$$\mathsf{U}^{i\lambda} \;=\; \mathsf{V}^{i\lambda}.$$

Conclusion

- Deux méthodes
  - Dev. As. rac. méthode de calcul formel justifiée à postériori
  - Dev. multi. méthode rigoureuse du début à la fin.

Conclusion

- Deux méthodes
  - Dev. As. rac. méthode de calcul formel justifiée à postériori
  - Dev. multi. méthode rigoureuse du début à la fin.
- On aboutit au même développement asymtptotique (à part dans les zones de transition)

Conclusion

- Deux méthodes
  - Dev. As. rac. méthode de calcul formel justifiée à postériori
  - Dev. multi. méthode rigoureuse du début à la fin.
- On aboutit au même développement asymtptotique (à part dans les zones de transition)
- Pas de hiérarchie entre les deux méthodes
  - Dépend de l'utilisateur
  - Dépend du problème
  - Pas une recette miracle